3 Limiti e continuità

In questo corso ci occuperemo prevalentemente del *calcolo infinitesimale*, disciplina matematica che affonda le sue radici nella Grecia del III secolo a.C. (Euclide, Archimede), ha un grande sviluppo a partire dal Seicento, parallelamente al nascere della scienza moderna, in particolare ad opera di Newton e Leibniz, tra il 1670 e il 1710 circa; viene quindi sottoposta a revisione critica e fondata rigorosamente nell'Ottocento, prima da Cauchy, nel 1821[1], poi da Weierstrass e da vari altri matematici (Heine, Cantor, Méray,...) intorno al 1870. Le idee e le tecniche di calcolo proprie di questa disciplina fanno oggi parte del bagaglio essenziale con cui scienza e tecnologia si esprimono e procedono.

Il fondamento concettuale del calcolo infinitesimale sta nella nozione di *limite* (D'Alembert 1765, Cauchy 1821), che quindi può a buon diritto considerarsi una pietra miliare nella storia del pensiero scientifico. Noi introdurremo questo concetto gradualmente, prima nel caso discreto (par. 1) e poi in quello continuo, in cui storicamente è nato (par. 2).

Nel contesto discreto, il limite si può vedere come un'*operazione* che, a differenza delle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto), viene eseguita non su una *coppia* di numeri ma su una *successione* di infiniti numeri. Per prima cosa introdurremo quindi il concetto di successione. Questo argomento, oltre a servirci immediatamente per introdurre il concetto di limite di funzione, sarà ripreso nel capitolo 5 parlando di *serie numeriche*, e nel capitolo 7 discutendo i *modelli dinamici discreti.*

1 SUCCESSIONI

1.1 Definizione di successione. Definizione di limite

Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ degli interi non negativi ordinato secondo l'ordine naturale

$$\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

[1] Corso di Analisi per l'Ecole Polytechnique di Parigi.

Questo è l'esempio canonico di successione. Stabiliamo ora una legge che associa, a ogni elemento di $\mathbb{N}$ (o da un certo intero in poi) un numero (reale):

$$n \longmapsto a_n$$

Chiameremo *successione* una tale corrispondenza.

Una successione può dunque vedersi come una funzione

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$f : n \mapsto a_n$$

(o eventualmente, $f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$, per un certo n_0 fissato). Il fatto che il dominio della funzione f sia l'insieme dei naturali, rende possibile visualizzare la successione enumerando i suoi valori, nell'ordine in cui essi si succedono al crescere di n:[2]

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Esempio

1.1

$n \geq 0$	$n \longmapsto n^2$	$0, 1, 4, 9, 16, \ldots$
$n \geq 0$	$n \longmapsto (-1)^n$	$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
$n \geq 1$	$n \longmapsto 2^{1/n}$	$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots$
$n \geq 1$	$n \longmapsto \dfrac{1}{n}$	$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$
$n \geq 2$	$n \longmapsto \dfrac{n+1}{n-1}$	$3, 2, \dfrac{5}{3}, \dfrac{6}{4}, \dfrac{7}{5}, \ldots$
$n \geq 0$	$n \longmapsto 4$	$4, 4, 4 \ldots$ (successione costante)

Possiamo rappresentare graficamente questa corrispondenza con i punti del piano cartesiano di coordinate (n, a_n) (fig.3.1).

Sottolineiamo che la successione è nota quando è nota la legge che, dato l'intero n, determina il numero a_n associato a quell'intero. Per indicare una successione useremo i simboli

$$n \longmapsto a_n \quad \text{oppure} \quad \{a_n\}$$

precisando l'insieme in cui varia l'indice n (tutto $\mathbb{N}$ o da un certo intero in poi).

Una successione $\{a_n\}$ si dirà

limitata inferiormente	se esiste un numero m tale che	$a_n \geq m \ \forall\, n$
limitata superiormente	se esiste un numero M tale che	$a_n \leq M \ \forall\, n$
limitata	se esistono due numeri m e M tali che	$m \leq a_n \leq M \ \forall\, n$

[2] I puntini di sospensione... scritti nella formula seguente dopo a_n sono fondamentali: significano che non stiamo considerando soltanto i primi n termini della successione (cioè un insieme finito di numeri), ma l'intera successione di infiniti termini (in cui n gioca il ruolo di indice muto).

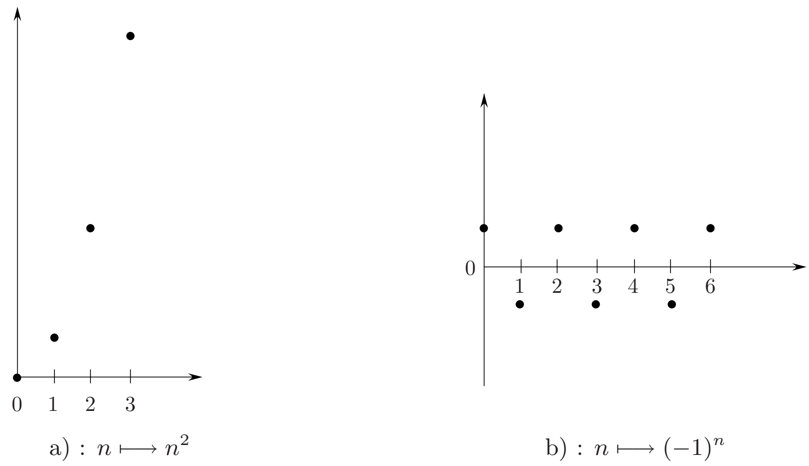

Figura 3.1.

Per esempio, la successione $\{(-1)^n\}$ è limitata; $\{n^2\}$ è limitata solo inferiormente; la successione $\{(-2)^n\}$ non è limitata (né inferiormente, né superiormente).

L'operazione che vogliamo definire (il *limite*) consente di rispondere in forma rigorosa alla domanda: *come si comportano i numeri* $\{a_n\}$ *quando* n *diventa sempre più grande?*

Cominciamo con l'introdurre un modo di dire molto utile.

Definizione 3.1 Diciamo che una successione $\{a_n\}$ possiede (o acquista) *definitivamente* una certa proprietà se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà per ogni intero $n \geq N$.

Esempio

1.2 La successione $\{n - 10\sqrt{n}\}$ è definitivamente positiva; la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) è definitivamente minore di $10^{-10^{10}}$.

Successioni convergenti

Definizione 3.2 Una successione $\{a_n\}$ si dice *convergente* se esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: qualunque sia $\varepsilon > 0$ risulta definitivamente

$$|a_n - l| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

In altre parole: per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero N (che naturalmente dipenderà in generale da questo ε) tale che

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \geq N$$

Se la successione $\{a_n\}$ è convergente, ad essa è associato perciò il numero l. Si osservi che tale numero è unico, poiché, se ve ne fossero due, l_1 e l_2, associati alla medesima successione, risulterebbe definitivamente (applicando la disuguaglianza triangolare (4.4), cap. 1)

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

ma tale disuguaglianza, potendo noi scegliere ε come vogliamo, può sussistere solo se $l_1 = l_2$.

DEFINIZIONE 3.3 Il numero l che compare nella (1.1) si chiama *limite* della successione $\{a_n\}$, e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \text{oppure} \quad a_n \to l \text{ per } n \to +\infty$$

(si legge, rispettivamente: il limite, per n tendente all'infinito, di a_n è l, oppure: a_n tende a l per n tendente a infinito).

Si noti che la disuguaglianza (1.1) corrisponde, più esplicitamente, alle seguenti due:

(1.2) $$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

Rappresentando graficamente i punti della successione

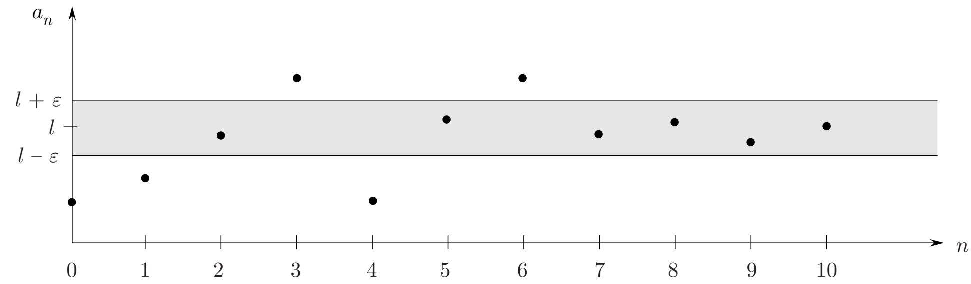

Figura 3.2.

la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ "comunque stretta", da un certo indice in poi i punti della successione non escono più da questa striscia (v. fig. 3.2). Da questa osservazione risulta chiaramente che: *ogni successione convergente è limitata.*

Esempi

1.3 Mostriamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$ (cosa che si può facilmente sospettare osservando l'andamento della successione). Delle due disuguaglianze

$$1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n-1} < 1 + \varepsilon$$

quella di sinistra è sempre soddisfatta, mentre quella di destra è soddisfatta per

$$n > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, basterà scegliere $N = (2+\varepsilon)/\varepsilon$ (o uguale al primo intero $> (2+\varepsilon)/\varepsilon$) per soddisfare la condizione richiesta dalla definizione di limite.

1.4 Per mostrare che $2^{1/n} \to 1$ per $n \to \infty$, si studiano le disuguaglianze

$$1 - \varepsilon < 2^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

Quella di sinistra è sempre soddisfatta; quella di destra, prendendo il logaritmo (in base 2) di ambo i membri, si scrive

$$\frac{1}{n} < \log_2(1 + \varepsilon)$$

ed è soddisfatta se $n > 1/\log_2(1 + \varepsilon)$. Si sceglie perciò $N = \ldots$

Non risultano convergenti invece le prime due successioni dell'esempio 1.1. Esse sono però molto diverse tra loro e conviene introdurre definizioni che ne mettano in risalto la differenza.

Successioni divergenti. Successioni irregolari

Definizione 3.4 Quando, al crescere di n, una successione supera definitivamente qualunque numero $M > 0$ fissato, diremo che *diverge a* $+\infty$; se invece scende al di sotto di $-M$,diremo che *diverge a* $-\infty$. (Il simbolo ∞ si legge "infinito").

Diremo nei due casi, rispettivamente, che $+\infty$ e $-\infty$ sono i limiti della successione e scriveremo, rispettivamente,:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{\to+\infty} a_n = -\infty\,. \qquad \blacksquare$$

Questi simboli, $+\infty$ e $-\infty$, non sono numeri. Se rappresentiamo i numeri reali sulla retta euclidea, ogni numero corrisponde a un punto e ogni punto a un numero. Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ conveniamo di indicare due "punti", uno ($+\infty$) sta alla destra di ogni punto di $\mathbb{R}$ e l'altro ($-\infty$) alla sinistra; a questi due punti non corrisponde però alcun numero (in altre parole, non possiamo definire sui simboli $+\infty$ e $-\infty$ le operazioni di somma e prodotto con le proprietà indicate in R_1 e R_2, anche se, come vedremo, potremo fare "parzialmente" queste operazioni).

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con l'aggiunta dei due elementi $\{+\infty\}$ e $\{-\infty\}$ sarà indicato con $\mathbb{R}^*$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Possiamo rappresentare "visivamente" l'insieme $\mathbb{R}^*$ mettendo in corrispondenza biunivoca (fig. 3.3) i punti della retta con quelli di una semicirconferenza, proiettando questi ultimi dal centro C sulla retta $\mathbb{R}$:
Ai punti A e B non corrisponde su $\mathbb{R}$ alcun punto; diremo che $\{-\infty\}$ è il corrispondente del punto A e $\{+\infty\}$ il corrispondente di B.

L'operazione di limite risulta completamente significativa se ambientata in $\mathbb{R}^*$ invece che in $\mathbb{R}$; cioè il limite di una successione può essere un numero reale l oppure $+\infty$ oppure $-\infty$; le successioni il cui limite è un numero reale si dicono *convergenti*, quelle il cui limite è $+\infty$ oppure $-\infty$ si dicono *divergenti*. La successione canonica $\{n\}$ degli interi naturali evidentemente diverge a $+\infty$; così pure la successione $\{2^n\}$.

Infine osserviamo che ci sono successioni che non ricadono in nessuna delle categorie precedenti, cioè non sono convergenti né divergenti; per esempio la successione $\{(-1)^n\}$ oppure $\{(-2)^n\}$ (si noti che la prima è limitata e la seconda no). Tali successioni si diranno *irregolari* o *indeterminate*. Per esse l'operazione di limite non è definita, ovvero *il loro limite non esiste.*

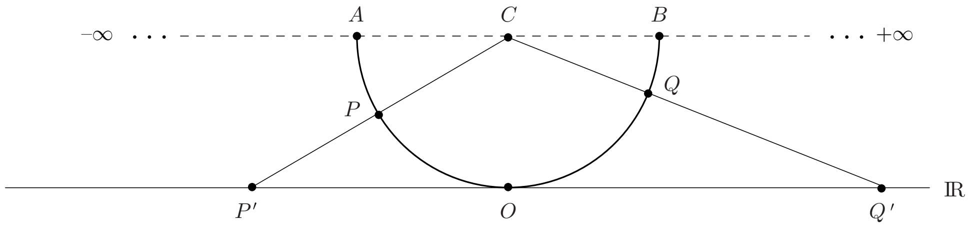

Figura 3.3.

Insiemi non limitati

È comodo adottare la convenzione introdotta per i limiti anche per il sup e per l'inf, estendendo la definizione di queste quantità nel modo seguente:

Definizione 3.5 Se l'insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non è limitato superiormente (inferiormente) diremo che

$$\sup E = +\infty \quad (\inf E = -\infty).$$

In questo modo la proprietà R_4 dei numeri reali può essere enunciata così:

> ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è dotato di estremo superiore e inferiore; $\sup E$ ($\inf E$) è un numero se E è limitato superiormente (inferiormente), altrimenti è $+\infty$ ($-\infty$).

Infinitesimi e infiniti

Una successione a_n tendente a zero si dice *infinitesima*. Ad esempio, sono infinitesime le successioni $\{\frac{1}{n}\}$, $\{\frac{1}{n^2}\}, \dots$

Il concetto di infinitesimo gioca un ruolo centrale ed è fondamentale anche per avere un'*immagine intuitiva* corretta ed efficace dei concetti del calcolo infinitesimale. Vedremo nel par. 2 che il concetto di infinitesimo nel continuo (cioè parlando di funzioni) sarà perfettamente analogo. L'idea chiave a cui prestare attenzione è la seguente:

> "infinitesimo" non è un "numero infinitamente piccolo" (concetto privo di senso, se non si vuole che denoti semplicemente il numero 0) ma una *quantità variabile* (successione o, come vedremo, funzione), che *diviene indefinitamente piccola.*

Analogamente, una successione a_n tendente a $\pm\infty$ si dice *infinita*. Ad esempio, $\{n^2\}$, $\{n!\}$ sono infiniti.

Talvolta è possibile precisare se una successione convergente si avvicina al suo limite *per eccesso* o *per difetto*. Questo concetto è precisato dalla prossima

Definizione 3.6 Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $l \in \mathbb{R}$ *per eccesso* (*per difetto*), e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^+ \text{ oppure } a_n \to l^+ \text{ per } n \to +\infty$$

(rispettivamente:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l^- \text{ oppure } a_n \to l^- \text{ per } n \to +\infty)$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$0 \le a_n - l < \varepsilon \text{ definitivamente}$$

(rispettivamente:

$$0 \le l - a_n < \varepsilon \text{ definitivamente}).$$

In sostanza, dire che $a_n \to l^+$ significa affermare che $a_n \to l$ e inoltre $a_n \ge l$ definitivamente; dunque a_n si avvicina ad l "da sopra", ossia approssima l per eccesso.

Si rifletta sui prossimi esempi:

Esempi

1.5

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+;$$

1.6

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1^-;$$

1.7

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

ma in questo caso non si può affermare né che $a_n \to 0^+$ né che $a_n \to 0^-$.

1.2 Successioni monotone

Definizione 3.7 Una successione $\{a_n\}$ si dirà:

monotona crescente se $a_n \le a_{n+1}$; strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;

monotona decrescente se $a_n \ge a_{n+1}$; strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$.

Per esempio, la successione $\{n^2\}$ è monotona strettamente crescente, la successione $\{\frac{1}{n}\}$ è monotona strettamente decrescente, la successione $\{(-1)^n\}$ non è monotona; ogni successione costante è monotona (crescente o decrescente, non strettamente). Riguardo all'operazione di limite, queste successioni hanno una importanza particolare; infatti esse non sono mai irregolari, ma sono convergenti oppure divergenti a seconda che siano limitate oppure no. Il risultato fondamentale è il seguente:

Teorema 3.1 (di monotonia) *Sia* $\{a_n\}$ *una successione monotona crescente e superiormente limitata.*
Allora $\{a_n\}$ *è convergente, e il suo limite è uguale a* $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Analogamente, se $\{a_n\}$ *una successione monotona decrescente e inferiormente limitata, allora* $\{a_n\}$ *è convergente, e il suo limite è uguale a* $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ricordiamo che il simbolo $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ denota l'estremo superiore dell'insieme dei valori a_n assunti dalla successione.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme dei valori assunti dalla successione, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché la successione è limitata superiormente, questo insieme è limitato superiormente, quindi (per la proprietà dell'estremo superiore di cui gode $\mathbb{R}$) esiste il suo estremo superiore,

$$\Lambda = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \Lambda \in \mathbb{R}.$$

Proviamo ora che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda.$$

Occorre mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

La seconda disuguaglianza è ovvia: per ogni n è $a_n \le \Lambda$ (e quindi $a_n < \Lambda + \varepsilon$), perché Λ è l'estremo superiore degli a_n, quindi in particolare è un maggiorante dell'insieme dei valori a_n. Per provare la prima disuguaglianza, consideriamo il numero $\Lambda - \varepsilon$. Ricordiamo che per definizione di estremo superiore, Λ è il *minimo* dei maggioranti dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Perciò, essendo $\Lambda - \varepsilon < \Lambda$, certamente $\Lambda - \varepsilon$ non è un maggiorante dell'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Questo significa che esiste un n_0 per cui

$$a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon.$$

D'altro canto la successione è monotona crescente, perciò per ogni $n \ge n_0$ risulta $a_n \ge a_{n_0}$. Abbiamo quindi provato che

$$a_n \ge a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$$

per ogni $n \ge n_0$, ossia definitivamente. Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$ (fig 3.4). ■

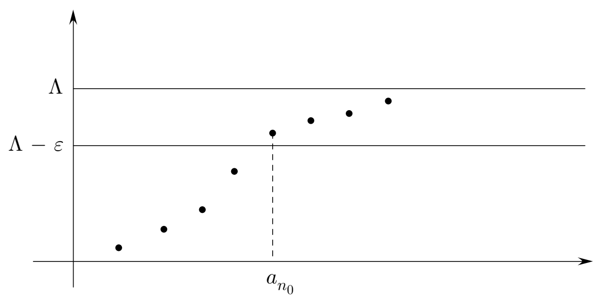

Figura 3.4.

Per esprimere anche simbolicamente che il limite è il sup (o l'inf) di una successione crescente (o decrescente) si usa la notazione (di evidente significato):

$$a_n \uparrow l \quad \text{oppure} \quad a_n \downarrow l.$$

Questo in particolare implica che $a_n \to l^-$ (rispettivamente, l^+), ma contiene una ulteriore informazione: la monotonia della successione.

Questo teorema è una conseguenza dell'assioma di continuità R_4 dei numeri reali (v. cap. 1, par. 5) e pertanto vale se l'ambiente che consideriamo è $\mathbb{R}$. Ad esempio, non è vero che una successione crescente e limitata di numeri razionali ammette sempre limite razionale, cioè in $\mathbb{Q}$.

Esempio

1.8 Sia $\{a_n\}$ la successione così definita:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0,1 \\ &\dots \\ a_2 &= 0,1011 \\ a_3 &= 0,10110111 \\ a_4 &= 0,1011011101111 \end{aligned}$$

e così via. (Al passo n si aggiunge al numero decimale ottenuto al passo precedente una cifra zero seguita da n cifre uguali a 1).

La successione $\{a_n\}$ è evidentemente crescente, e superiormente limitata (ad esempio, $a_n \le 1$). In $\mathbb{R}$, la successione converge al numero $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, che dopo la virgola presenta un allineamento decimale illimitato e non periodico di cifre (una cifra 1, una cifra 0, due cifre 1, una cifra 0, tre cifre 1, una cifra 0, e così via all'infinito). Quindi il limite della successione è un numero irrazionale. Quest'esempio mostra che nell'insieme $\mathbb{Q}$ il teorema di monotonia è falso.

Vedremo in seguito che il teorema di monotonia sarà utilizzato per dimostrare importanti proprietà delle funzioni continue. Questo teorema quindi costituisce una delle motivazioni per cui è utile studiare l'analisi matematica nell'ambiente dei numeri reali, anziché in quello dei numeri razionali.

Il teorema di monotonia si può completare con il prossimo enunciato, che considera successioni limitate o illimitate:

COROLLARIO 3.2 *Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente. Allora esiste*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esplicitamente: se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, allora converge (e il suo limite è uguale all'estremo superiore dei suoi valori, che in questo caso è un numero reale); se invece $\{a_n\}$ è superiormente illimitata, allora a_n tende a $+\infty$ (che in questo caso è pari all'estremo superiore dei suoi valori).

Si può anche dire, sinteticamente: una successione monotona, converge o diverge (non può essere irregolare).

DIMOSTRAZIONE. Se $\{a_n\}$ è superiormente limitata, l'enunciato è contenuto nel teorema di monotonia. Se invece $\{a_n\}$ è superiormente illimitata, questo significa che per ogni $K > 0$ esiste un n_0 tale che $a_{n_0} > K$. D'altro canto la successione è crescente, perciò per ogni $n \ge n_0$ si ha $a_n \ge a_{n_0} > K$. Abbiamo quindi provato che per ogni $K > 0$ è $a_n > K$ definitivamente. Questo significa che $a_n \to +\infty$. ■

Esempio

1.9 (*Successione geometrica*) Si consideri la progressione geometrica di ragione q, $\{q^n\}$ (cfr. cap. 1, paragrafo 2):

$$1, q, q^2, q^3, \ldots, q^n, \ldots$$

Se $q > 1$ la successione è monotona crescente, illimitata superiormente.

Se $q = 1$ la successione è costante. Se $0 < q < 1$, la successione è monotona decrescente; è facile mostrare che tende a zero. Se q è negativo la successione non è più monotona. Lo studente verifichi le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad q > 1 \\ 1 & \text{se} \quad q = 1 \\ 0 & \text{se} \quad |q| < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad q \leq -1 \end{cases}$$

1.3 Il calcolo dei limiti

In questo paragrafo passeremo in rassegna i teoremi basilari sul calcolo dei limiti. Le dimostrazioni si basano sulla definizione di limite, sull'uso di *disuguaglianze*, e sull'uso di proprietà *definitivamente vere*. In particolare, questi teoremi illustrano la relazione tra l'operazione di limite e le strutture algebriche e d'ordine presenti in $\mathbb{R}$.

Cominciamo ad esaminare le proprietà dell'operazione di limite rispetto alle *operazioni algebriche*. Quando il limite esiste finito, si dimostra un risultato semplice e naturale: l'operazione di limite commuta con queste operazioni, cioè:

Teorema 3.3 (Algebra dei limiti) *Se $a_n \to a$ e $b_n \to b$ allora*

$$\boxed{\begin{aligned} a_n \pm b_n &\to a \pm b \\ a_n b_n &\to ab \\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{a}{b} \qquad (b_n, b \neq 0) \\ a_n^{b_n} &\to a^b \qquad (a_n, a > 0) \end{aligned}}$$

Dimostrazione. Proviamo ad esempio che:

$$a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \end{aligned}$$

(per la disuguaglianza triangolare, cap.1, par. 4.3). Poiché per ipotesi $a_n \to a$ e $b_n \to b$, si ha che

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ e } |b_n - b| < \varepsilon \text{ definitivamente,}$$

perciò concludiamo che

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon \text{ definitivamente,}$$

quindi $a_n + b_n \to a + b$.

Proviamo ora:

$$a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a_n b_n \to ab$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Usando ancora la disuguaglianza triangolare si ha:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n (b_n - b) + b (a_n - a)| \leq \\ &\leq |a_n (b_n - b)| + |b (a_n - a)| = |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &\leq |a_n| \ |b_n - b| + |b| |a_n - a| . \end{aligned}$$

Poiché $a_n \to a$, $|a_n - a| < \varepsilon$ definitivamente; inoltre $|a_n| < |a| + \varepsilon$ definitivamente; poiché $b_n \to b$, $|b_n - b| < \varepsilon$ definitivamente. Quindi:

$$|a_n b_n - ab| < (|a| + \varepsilon) \varepsilon + |b| \varepsilon < \varepsilon \cdot \text{cost.}$$

definitivamente. Per l'arbitrarietà di ε segue la tesi.

Tralasciamo le dimostrazioni degli altri due casi. ■

L'operazione di limite mantiene inoltre l'*ordinamento* cioè:

TEOREMA 3.4 (DI PERMANENZA DEL SEGNO, 1^a FORMA) *Se $a_n \to a$ e $a > 0$ ($a < 0$) allora $a_n > 0$ definitivamente ($a_n < 0$ definitivamente).*

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di limite abbiamo che

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ definitivamente,}$$

che riscriviamo nella forma:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \text{ definitivamente.}$$

Poiché $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che sia anche $a - \varepsilon > 0$, allora la disuguaglianza $a - \varepsilon < a_n$ mostra che $a_n > 0$ definitivamente. In modo analogo si dimostra il caso $a < 0$. ■

TEOREMA 3.5 (DI PERMANENZA DEL SEGNO, 2^a FORMA) *Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$, e $a_n \geq 0$ definitivamente, allora risulta $a \geq 0$. Più in generale:*

$$\textit{se } a_n \to a, b_n \to b \textit{ e } a_n \geq b_n \textit{ definitivamente, allora } a \geq b.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal teorema precedente. Infatti, se per assurdo fosse $a < 0$, dal teorema precedente si avrebbe $a_n < 0$ definitivamente, il che è incompatibile con l'ipotesi che sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Questo dimostra la prima affermazione del teorema. Applicando ora questa proprietà alla differenza $a_n - b_n$ si ottiene anche la seconda affermazione. Infatti:

$$a_n \geq b_n \text{ definitivamente} \Longrightarrow a_n - b_n \geq 0 \text{ definitivamente,}$$

e poiché $a_n - b_n \to a - b$ (teorema sull'algebra dei limiti), si conclude $a - b \geq 0$, ovvero $a \geq b$. ■

L'ultima relazione significa che in una disuguaglianza tra due successioni si può passare al limite ad ambo i membri, mantenendo il segno $\leq$. Si noti che in generale, invece, nel passaggio al limite non si conserva il segno di disuguaglianza *stretta*: ad esempio, anche se gli a_n sono strettamente positivi, il loro limite a è positivo o *nullo*, come mostra il semplice esempio di $\frac{1}{n} \to 0$.

È utile anche la seguente proposizione:

Teorema 3.6 (del confronto) *Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e*

$$a_n \to l, c_n \to l \in \mathbb{R},$$

allora anche $b_n \to l$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora definitivamente si ha

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon; \;\; l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$$

da cui segue (definitivamente)

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

e quindi, definitivamente,

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$$

Dunque $b_n \to l$. ■

Casi particolari di questo teorema che si usano frequentemente sono espressi dal prossimo corollario, molto utile quando si studia il prodotto tra una successione oscillante (ma limitata) e una che tende a zero:

Corollario 3.7 *1. Se $|b_n| \leq c_n$ definitivamente e $c_n \to 0$, allora anche $b_n \to 0$.*
2. Se $c_n \to 0$ e b_n è limitata (ma non necessariamente convergente), allora $c_n b_n \to 0$. Detto a parole: il prodotto di una successione infinitesima e una limitata è infinitesimo.

Dimostrazione.
1. Sappiamo che definitivamente è $-c_n \leq b_n \leq c_n$; d'altro canto se $c_n \to 0$ anche $-c_n \to 0$, quindi per il teorema precedente (con $a_n = -c_n$ e $l = 0$) si ha che $b_n \to 0$.
2. Se b_n è limitata, ossia $|b_n| \leq K$ per un certo $K > 0$ e per ogni n, possiamo scrivere

$$|b_n c_n| \leq K |c_n| .$$

Poiché $c_n \to 0$, anche $K |c_n| \to 0$, e per il punto 1 si conclude che $b_n c_n \to 0$. ■

Esempi

1.10 Applicando la definizione si dimostri che

$$n^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{se} \quad \alpha = 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Infatti, se $\alpha > 0$, fissato $M > 0$ risulta $n^\alpha > M$ per $n > M^{1/\alpha}$; perciò $n^\alpha \to +\infty$; se $\alpha < 0$, scrivendo $n^\alpha = 1/n^{|\alpha|}$, si osserva che $1/n^{|\alpha|} < \varepsilon$ per $n^{|\alpha|} > 1/\varepsilon$ ossia per $n > 1/\varepsilon^{1/|\alpha|}$, cioè definitivamente.

1.11 Limiti che si presentano nella forma di rapporto di due espressioni, ognuna costituita dalla somma di potenze di n:

$$\frac{n^{5/2} - 3n + 7}{n^3 + \sqrt{n} - 3n^2}$$

Si mette in evidenza a numeratore come a denominatore la potenza maggiore

$$\ldots = \frac{n^{5/2}\left(1 - \dfrac{3}{n^{3/2}} + \dfrac{7}{n^{5/2}}\right)}{n^3\left(1 + \dfrac{1}{n^{5/2}} - \dfrac{3}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1 - \dfrac{3}{n^{3/2}} + \dfrac{7}{n^{5/2}}}{1 + \dfrac{1}{n^{5/2}} - \dfrac{3}{n}}\right).$$

Ora per il teorema sull'algebra dei limiti e sapendo che potenze negative di n tendono a zero possiamo affermare che:

$$1 - \frac{3}{n^{3/2}} + \frac{7}{n^{5/2}} \to 1; \quad 1 + \frac{1}{n^{5/2}} - \frac{3}{n} \to 1.$$

Pertanto la successione tra parentesi tende a 1; d'altro canto $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, perciò la successione di partenza tende a zero.

1.12 $\frac{\sin n}{n}$. La successione è il prodotto di $\frac{1}{n}$ (convergente) e $\sin n$ (irregolare); quindi il teorema sull'algebra dei limiti non è applicabile. Tuttavia è applicabile l'ultimo corollario: la successione $\frac{1}{n}$ è infinitesima mentre $|\sin n| \leq 1$, perciò $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Fin qui abbiamo visto teoremi che operano su coppie di successioni entrambe convergenti o comunque limitate. Consideriamo ora il caso in cui i limiti sono $+\infty$ o $-\infty$. Supponiamo, per esempio, che $a_n \to a$ e $b_n \to +\infty$; allora è facile (e intuitivo) vedere che $a_n + b_n \to +\infty$. Abbrevieremo questa scrittura così: $a + \infty = +\infty$. Ragionando in maniera analoga possiamo compendiare le regole per il limite della somma (o differenza) di due successioni delle quali una o entrambe sono divergenti con le scritture seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned} a + \infty &= +\infty \\ a - \infty &= -\infty \\ +\infty + \infty &= +\infty \\ -\infty - \infty &= -\infty \end{aligned}}$$

Analogamente per il prodotto (o il rapporto) abbiamo le regole seguenti; il segno di ∞ va determinato con la usuale regola dei segni:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a \cdot \infty = \infty & (a \neq 0) \\ \dfrac{a}{0} = \infty & (a \neq 0) \\ \dfrac{a}{\infty} = 0 & \end{array}}$$

Esplicitamente, la seconda regola scritta significa ad esempio quanto segue:

$$\text{se } a_n \to a > 0 \text{ e } b_n \to 0^+, \text{ allora } \frac{a_n}{b_n} \to +\infty.$$

In modo analogo si procede, in base alla regola dei segni, se $a < 0$ o $b_n \to 0^-$; è comunque necessario, per applicare questo teorema, sapere che b_n tende a zero per eccesso o per difetto.

Le precedenti regole prendono il nome di "aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito".

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ad esempio che:

$$a_n \to +\infty, b_n \to b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to 0.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $a_n \to +\infty$, definitivamente si ha

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Poiché $b_n \to b$, definitivamente si ha

$$|b_n| < |b| + \varepsilon$$

Ne segue che definitivamente

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right| < \varepsilon\,(|b| + \varepsilon) < \varepsilon \cdot \text{cost.}$$

Per l'arbitrarietà di ε, segue la tesi. ■

Lo studente noterà che mancano le regole relative a quattro operazioni, e cioè

$$+\infty - \infty\,, \quad 0 \cdot \infty\,, \quad \frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Queste espressioni si chiamano *forme di indecisione*, poiché nessuna regola può essere stabilita a priori per determinare il risultato, come vedremo negli esempi sotto illustrati.

Le regole sopra elencate (e la mancanza di regole per le forme di indecisione) confermano la natura particolare dei "punti" $+\infty$ e $-\infty$, che non possono essere considerati "numeri" poiché non rispettano le proprietà R_1 e R_2 del capitolo 1 paragrafo 3.

Esempio

1.13 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$: forma di indecisione del tipo $+\infty - \infty$.
Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ si trova

$$\ldots = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \to 0$$

Limiti di successioni che si presentano nella forma $a_n^{b_n}$ si trattano più facilmente considerando la successione dei logaritmi (per fissare le idee, in base 10)

$$\log_{10} a_n^{b_n} = b_n \log_{10} a_n$$

Si mostra che (cfr. anche più avanti, al capitolo 4 paragrafo 3.3) se questa successione converge a l, diverge a $+\infty$, $-\infty$, o è indeterminata, la successione $a_n^{b_n}$, rispettivamente, converge a 10^l, $+\infty$, 0, è indeterminata.

Si può così osservare che le espressioni

$$1^{\pm\infty} \qquad 0^0 \qquad (+\infty)^0$$

sono altrettante forme di indecisione, corrispondenti (passando al logaritmo) alla forma di indecisione $0 \cdot \infty$.

1.4 Il numero e

Introdurremo ora un numero molto importante per l'Analisi, che sarà definito come limite di una particolare successione. Cominciamo a dimostrare il seguente risultato:

Teorema 3.8 *La successione*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è convergente.

Si osservi che questa successione presenta una forma di indecisione 1^∞.

Dimostrazione. Si proverà che la successione è monotona crescente

$$a_{n+1} > a_n$$

e limitata:

$$2 \leq a_n < 4$$

e perciò è convergente, per il Teorema di monotonia (par. 1.2).

Per provare che a_n è monotona crescente, studiamo, per $n \geq 2$, il rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1 - n \cdot \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 1, \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza scritta si è applicata la *disuguaglianza di Bernoulli* (v. cap.1, par. 7)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

con $x = -\frac{1}{n^2}$. Questo mostra che $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$, ossia $a_n \geq a_{n-1}$, e la successione è monotona crescente. In particolare, essendo $a_1 = 2$, segue $a_n \geq 2 \ \forall\, n \geq 1$.

Consideriamo ora la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Si noti che

$$b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

perciò $b_n > a_n$. Con calcoli simili a quelli appena svolti (lasciamo i dettagli al lettore), si mostra che che $b_n \leq b_{n-1}$. Poiché $b_1 = 4$, risulta quindi

$$a_n < b_n \leq b_1 = 4, \forall\, n \geq 1,$$

e a_n è limitata. ∎

Il limite della successione a_n appena studiata è un numero (irrazionale) molto importante in matematica, per varie ragioni che vedremo; esso viene indicato con la lettera e (*numero di Nepero*) e la sua rappresentazione decimale inizia così:

$$2,7182818284\ldots$$

Dunque, *per definizione*,

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Questo numero viene molto spesso usato come base dei logaritmi, i quali, quando si usa questa base, vengono detti *naturali* o *neperiani* (dal nome del matematico John Napier) e indicati semplicemente col simbolo log (oppure ln) senza indicazione della base.

Il numero di Nepero e un problema... finanziario

Supponiamo di possedere un capitale (per esempio, 1 milione di euro) e di investirlo al tasso di interesse annuale t (cioè con una rendita di t milioni all'anno).

Se l'interesse viene pagato annualmente, dopo un anno il capitale posseduto sarà $1+t$. Se l'interesse viene calcolato mensilmente avremo: – dopo il primo mese un capitale pari a $1+\frac{t}{12}$; – dopo il secondo mese, pari a $1+\frac{t}{12}+\frac{t}{12}\left(1+\frac{t}{12}\right) = \left(1+\frac{t}{12}\right)^2$; – dopo il terzo mese, pari a $\left(1+\frac{t}{12}\right)^2\frac{t}{12}+\left(1+\frac{t}{12}\right)^2 = \left(1+\frac{t}{12}\right)^3$; – alla fine dell'anno avremo un capitale pari a $\left(1+\frac{t}{12}\right)^{12}$.

Se l'interesse viene calcolato ogni n-esimo di anno, avremo alla fine un capitale pari a

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

Per $t=1$ (rendita del 100%!) otteniamo esattamente la successione che definisce e.

Far tendere n a ∞ significa calcolare l'interesse dopo frazioni di anno sempre più piccole fino ad arrivare a calcolarlo con continuità. Il capitale che si ottiene alla fine dell'anno in quest'ultimo caso è esattamente pari a e.

Una volta *definito* il numero e come

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

si può *dimostrare* che risulta anche:

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}. \tag{1.3}$$

Inoltre, a partire dalle due relazioni precedenti, si può provare il seguente

TEOREMA 3.9 *Sia* $\{a_n\}$ *una qualsiasi successione divergente (a* $+\infty$ *o* $-\infty$*). Allora esiste*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

(Una traccia per la dimostrazione della (7.14) e di questo teorema sarà fornita nei Complementi alla fine del par. 1). Quest'ultimo teorema si rivela estremamente utile nel calcolo di limiti che coinvolgono la forma di indeterminazione $[1^\infty]$.

Esempio

1.14 Calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n}.$$

Si tratta di una forma di indeterminazione $[1^\infty]$. Scriviamo:

$$\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n+1}}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3(5n+1)}{n}}}\equiv\frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{b_n}}$$

con $a_n=\frac{n}{3}$. Per il teorema precedente, la successione entro parentesi quadre tende ad e, mentre l'esponente

$$b_n=\frac{3\,(5n+1)}{n}\to 15$$

perciò il limte cercato è $1/e^{15}$.

Altre situazioni di questo tipo saranno illustrate negli esercizi alla fine del par. 1.

1.5 Confronti e stime asintotiche

Abbiamo visto che una successione che tende a 0 è un *infinitesimo*; una successione che diverge (a $+\infty$, a $-\infty$) si dice *infinito*. Quando due successioni sono entrambe infinitesimi o entrambe infiniti, è utile poter stabilire un confronto tra di esse, per capire quale delle due tenda "più rapidamente" a 0 o all'infinito.

Esempi di infiniti sono le successioni seguenti:

$$\{\log n\}\quad\{\sqrt{n}\}\quad\{n^2\}\quad\{2^n\}$$

Esempi di infinitesimi si ottengono dalle successioni precedenti considerando gli elementi reciproci.

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due infiniti. Consideriamo il limite del rapporto a_n/b_n; si hanno quattro possibilità:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}0 & \text{i)}\\ l\text{ finito e }\neq 0 & \text{ii)}\\ \pm\infty & \text{iii)}\\ \text{inesistente} & \text{iv)}\end{cases}$$

Diciamo che:
i) $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$

ii) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello *stesso ordine*

iii) $\{a_n\}$ è un infinito di *ordine superiore* a $\{b_n\}$

iv) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ *non sono confrontabili.*

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infinitesimi (e b_n è definitivamente $\neq 0$), ancora si considera il limite del rapporto a_n/b_n e, in corrispondenza delle 4 possibilità sopra elencate, diremo che:

i) $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine superiore* a $\{b_n\}$

ii) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi *dello stesso ordine*

iii) $\{a_n\}$ è un infinitesimo di *ordine inferiore* a $\{b_n\}$

iv) $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ *non sono confrontabili.*

Il caso $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ è particolarmente importante: si usa dire, in tal caso, che le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono *asintotiche* e, per indicare questa circostanza, si scrive

$$a_n \sim b_n$$

(si legge: a_n è *asintotico* a b_n).

Il simbolo di asintotico è molto utile nel calcolo dei limiti per le seguenti proprietà (che si verificano in base alla definizione):

Proposizione 3.1

1. *Se $a_n \sim b_n$, le due successioni hanno lo stesso comportamento: convergono allo stesso limite, o divergono entrambe a $\pm\infty$, o entrambe non hanno limite.*
2. *Si possono scrivere catene di relazioni asintotiche, cioè:*

$$\textit{se}\ \ a_n \sim b_n \sim \ldots \sim c_n,\ \ \textit{allora}\ \ a_n \sim c_n$$

3. *Un'espressione composta da prodotto o quoziente di più fattori può essere stimata fattore per fattore:*

$$\textit{se}\ a_n \sim a'_n, b_n \sim b'_n,\ c_n \sim c'_n,\ \ \textit{allora}\ \ \frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}$$

Dimostrazione.
1. Dimostriamo la prima affermazione: se $a_n \sim b_n$, le due successioni hanno lo stesso comportamento. Sia $a_n \to l \in \mathbb{R}$; poiché $b_n = \frac{b_n}{a_n} \cdot a_n$ e $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ (per definizione di asintotico), allora per il teorema sul limite del prodotto

$$b_n \to 1 \cdot l = l.$$

Lo stesso teorema (nel caso di limite infinito) permette di concludere che se $a_n \to \pm\infty$ e $b_n \sim a_n$, anche $b_n \to \pm\infty$. Osserviamo ora che la relazione di asintotico è simmetrica, quindi quanto appena provato mostra anche che se b_n converge (diverge), anche a_n converge

(diverge). Ne concludiamo che se a_n è irregolare, anche b_n è irregolare, perché se per assurdo non lo fosse, per quanto appena affermato anche a_n sarebbe convergente o divergente.
2. Proviamo la transitività della relazione di asintotico:

$$\text{se } a_n \sim b_n \text{ e } b_n \sim c_n \text{ allora } a_n \sim c_n.$$

Le nostre ipotesi significano che

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \text{ e } \frac{b_n}{c_n} \to 1.$$

Allora per il teorema sul limite del prodotto,

$$\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{b_n}{c_n} \to 1.$$

Analogamente si prova la terza proprietà. ■

Attenzione: lo stesso *non vale* per le somme o per l'esponenziale.

Un tipico modo per mostrare che $a_n \sim b_n$ consiste nello scrivere $a_n = b_n c_n$ con $c_n \to 1$. Ad esempio:

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \sim 2n^2$$

perché $\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{2n^2}\right) \to 1$.

OSSERVAZIONE Il fatto che la relazione di asintotico soddisfi le 3 proprietà:

1. riflessiva: $a_n \sim a_n$;
2. simmetrica: se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$;
3. transitiva: se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$

si esprime dicendo che "asintotico" è una *relazione di equivalenza.* (Si noti che le prime due proprietà sono immediate, mentre la terza è stata dimostrata sopra). Più in generale, in matematica si chiama relazione d'equivalenza una relazione che soddisfa i 3 assiomi ora enunciati.

Mostriamo ora il seguente:

Teorema 3.10 (Gerarchia degli infiniti)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

per ogni $a > 1, \alpha > 0$.

Questi limiti descrivono la "velocità" con cui i logaritmi (con base > 1), le potenze, gli esponenziali (con base > 1) vanno all'∞: i logaritmi vanno più lentamente di qualsiasi potenza, le potenze più lentamente di qualsiasi esponenziale a base > 1.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la prima relazione, iniziamo a stabilire un'utile disuguaglianza tra un qualsiasi numero reale positivo e il suo logaritmo. Per $x \in \mathbb{R}, x > 0$, sia k la parte intera di x (v. cap. 2, par. 3.6), ossia l'intero $k \geq 0$ per cui è $k \leq x < k+1$. Si ha:

$$2^x \geq 2^k = (1+1)^k \geq 1 + k > x$$

dove: la prima disuguaglianza segue dalla monotonia della funzione esponenziale, la seconda dallo sviluppo del binomio di Newton (o dalla disuguaglianza di Bernoulli). Passando ai logaritmi in base a, otteniamo

$$\log_a x < x \log_a 2$$

per ogni $x > 0$. Applichiamo ora questa disuguaglianza al numero $x = n^{\alpha/2}$ e abbiamo:

$$\frac{\alpha}{2} \log_a n < n^{\alpha/2} \log_a 2$$

e quindi

$$\frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2$$

$$\frac{\log_a n}{n^{\alpha}} = \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}} \leq \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Per il teorema del confronto, $\frac{\log_a n}{n^\alpha} \to 0$, e la prima relazione è dimostrata.

Applichiamo ora questo risultato sostituendo all'intero n l'intero 2^n. Avremo:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a (2^n)}{(2^n)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log_a 2}{(2^\alpha)^n}.$$

Se ora $a > 1$ è fissato, scegliendo $\alpha > 0$ in modo che sia $2^\alpha = a$ otteniamo che $\frac{n}{a^n} \to 0$, che è la seconda relazione nel caso particolare in cui n è elevato ad esponente 1. Il caso generale segue dall'identità:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{(a^\alpha)^n}\right)^\alpha.$$

Infatti per il risultato precedente $\frac{n}{(a^\alpha)^n} \to 0$ (la base a^α è ancora un numero > 1), quindi anche $\left(\frac{n}{(a^\alpha)^n}\right)^\alpha \to 0$. ■

Altri confronti tra infiniti si possono risolvere grazie al seguente criterio:

TEOREMA 3.11 (CRITERIO DEL RAPPORTO) *Sia a_n una successione positiva (cioè $a_n > 0$ per ogni n). Se esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

e $l < 1$, allora $a_n \to 0$; se $l > 1$ (ed eventualmente $l = +\infty$), allora $a_n \to +\infty$.

Il teorema precedente riconduce lo studio del carattere di una successione positiva, a_n, al calcolo del limite di un'altra successione, la successione (dei rapporti), $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. In certi casi quest'ultima è più semplice da studiare di quella di partenza, come vedremo negli esempi. Si osservi che nel caso $l = 1$ il teorema non permette di concludere nulla.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente, ossia per ogni $n \geq n_0$ (con n_0 opportuno) si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$. Scegliamo ε abbastanza piccolo perché si abbia $l + \varepsilon < 1$. Possiamo scrivere la catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} &a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0}; \\ &a_{n_0+2} < (l+\varepsilon)\, a_{n_0+1} < (l+\varepsilon)^2\, a_{n_0} \\ &\quad\ldots \\ &a_{n_0+k} < (l+\varepsilon)^k\, a_{n_0}. \end{aligned}$$

Poiché $(l+\varepsilon) < 1$, si ha $(l+\varepsilon)^k \to 0$ per $k \to \infty$. D'altro canto a_{n_0} è fissato; dunque per k abbastanza grande il secondo membro (e quindi il primo) è piccolo quanto si vuole, il che dimostra che $a_n \to 0$.

Supponiamo ora che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$. Fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon$. Scegliamo ε abbastanza piccolo perché si abbia $l - \varepsilon > 1$. Analogamente a prima, possiamo ottenere la disuguaglianza:

$$a_{n_0+k} > (l-\varepsilon)^k\, a_{n_0}$$

per un certo n_0 fissato e qualsiasi k. Poiché $(l-\varepsilon) > 1$ e quindi $(l-\varepsilon)^k \to +\infty$, si conclude che $a_n \to +\infty$. ■

Esempi

1.15 Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0 \text{ per ogni } b > 0.$$

Applichiamo il criterio del rapporto alla successione $a_n = \frac{b^n}{n!}$. Si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \to 0.$$

Per il crietrio del rapporto allora, $\frac{b^n}{n!} \to 0$. Abbiamo quindi ottenuto un nuovo caso nella gerarchia degli infiniti.

1.16 Si provi a calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$$

col criterio del rapporto, osservando che il metodo fallisce.

Ecco alcuni esempi di come si applicano tutte le osservazioni precedenti per risolvere alcune forme di indeterminazione. Quando avremo studiato un certo numero di *limiti notevoli* (par. 3.3) potremo risolvere mediante stime asintotiche situazioni più complesse di queste.

Esempi

1.17

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Considerando solo le potenze di grado massimo a numeratore e denominatore, possiamo scrivere:

$$\frac{2n^3+4n+1}{5\,(n+1)^3} \sim \frac{2n^3}{5n^3} = \frac{2}{5}$$

e pertanto la successione tende a $2/5$.

1.18

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n}{2^{n+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

2^n è un infinito di ordine superiore rispetto ad n; possiamo scrivere quindi:

$$2^n+n = 2^n\left(1+\frac{n}{2^n}\right) \sim 2^n$$

perché $\frac{n}{2^n} \to 0$, e quindi $\left(1+\frac{n}{2^n}\right) \to 1$. Pertanto

$$\frac{2^n+n}{2^{n+1}} \sim \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

e il limite è $\frac{1}{2}$.

1.19

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \left[\infty^0\right]$$

Scriviamo

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\log n^{1/n}} = e^{\frac{\log n}{n}}.$$

Usando il confronto di infiniti, $\frac{\log n}{n} \to 0$, e quindi si deduce

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = e^0 = 1.$$

1.20

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Applicando il criterio del rapporto, consideriamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la definizione di e; perciò $a_n \to 0$. Abbiamo quindi provato che $n!$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a n^n.

Esercizi

1 Dare esempi di "infiniti" di ordine inferiore a $\{\log n\}$ e di ordine superiore a $\{2^n\}$.

2 Provare che

$$\log(n+1) \sim \log n$$

3 Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

per le seguenti successioni:

$$a_n = n^n \qquad a_n = n! \qquad a_n = 2^n \qquad a_n = n^2$$

4 Dare una stima asintotica delle seguenti successioni, mediante una successione "più semplice", e calcolare quindi il limite:

$$\frac{n^3+2n^2+\sin n}{n+\log n} \qquad \frac{n^2\log n+n}{\log 3n} \qquad \frac{n!-(n-1)!}{n+(n-2)!}$$

5 Lo studente, utilizzando una normale calcolatrice tascabile o un PC, calcoli $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Troverà, per esempio

n	$(1+1/n)^n$
10^3	2.7169239
10^4	2.7181459
$\vdots$	$\vdots$
10^{11}	1
10^{12}	1

Cerchi di spiegarne la ragione.

6 Un altro esempio: il limite

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)n$$

si presenta sotto la forma di indecisione $\infty-\infty$. Moltiplicando e dividendo l'espressione per $\sqrt{n^2+1}+n$ tale limite prende la forma

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

Se si usa una calcolatrice per il calcolo del limite si ottiene (per esempio)

n	$(\sqrt{n^2+1}-n)n$	$n/(\sqrt{n^2+1}+n)$
10^2	0.4999875	0.4999875
10^3	0.5	0.499999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^7	0	0.5
10^8	0	0.5

Spiegare la ragione del diverso risultato.

7 Calcolare i limiti, per $n\to+\infty$, delle successioni seguenti:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad \sqrt{n^2+n}-n \qquad (\sqrt{n^4+1}-n^2)n$$

$$\log(n+1)-\log n \qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^9}$$

COMPLEMENTI

1 Dimostrare il teorema sul limite del quoziente: se $a_n\to a, b_n\to b$, allora $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ purché $b_n, b\neq 0$.

(*Suggerimento: per maggiorare* $\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a}{b}\right|$ *fare denominatore comune; ora il numeratore si maggiora in modo simile a quello visto nella dimostrazione del teorema sul limite del prodotto; per il denominatore occorre invece dimostrare che, ad esempio,* $|b_n|\geq|b|/2$ *definitivamente, e poi...*)

 © 978-88-08-06485-1

2 Dimostrare le relazioni che abbiamo chiamato "aritmetizzazione parziale di infinito", nei casi che non sono stati dimostrati.

3 Dimostrare che i valori assunti dalla successione $\sin n$ sono tutti diversi tra loro, ossia che $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$ implica $\sin n \neq \sin m$.

4 Provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$$

(*Suggerimento*: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\ldots$; ricondursi al limite che definisce e).

5 Provare il Teorema 3.9 enunciato nel par. 1.4, ad esempio nel caso $a_n \to +\infty$.
Suggerimento: detta $[a_n]$ la parte intera di a_n, provare anzitutto le disuguaglianze:

$$\left(1+\frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1+\frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

Quindi sfruttando opportunamente il fatto che $[a_n]$ è intero, ricondursi al limite già noto di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

6 Dimostrare la proprietà 3 del simbolo di $\sim$ enunciata nel paragrafo 1.5 (Proposizione 3.1), usando la definizione di "asintotico" e di limite.

7 Si faccia un esempio di due successioni a_n, b_n tendenti a $+\infty$, per cui si ha:

$$a_n \sim b_n \text{ ma } e^{a_n} \textit{ non asintotico } \text{a } e^{b_n}.$$

Dunque il simbolo di asintotico non si può usare con gli esponenziali come si userebbe nei prodotti o quozienti.
(*Suggerimento*: scegliere come a_n la somma di due infiniti di tipo diverso).

2 LIMITI DI FUNZIONI, CONTINUITÀ, ASINTOTI

L'operazione di limite si può estendere dalle successioni alle funzioni. Potremo così precisare il comportamento di una funzione quando la variabile indipendente si muove vicino a un determinato punto oppure diventa molto grande (in valore assoluto).

In questo paragrafo introdurremo i concetti fondamentali riguardanti i limiti e la continuità di funzioni; nel prossimo paragrafo 3 svilupperemo i teoremi e gli strumenti che permetteranno il calcolo effettivo dei limiti; infine, nel paragrafo 4 approfondiremo lo studio delle proprietà delle funzioni continue, incontrando alcuni dei più significativi teoremi dell'analisi delle funzioni di una variabile. Nei capitoli successivi, mediante l'operazione di limite introdurremo i concetti di derivata, di differenziale e di integrale per una funzione reale di variabile reale.

Consideriamo come caso tipico un intervallo I, un punto $c \in I$ e una funzione f a valori reali, definita in I, salvo al più nel punto c. L'intervallo I può essere limitato o illimitato, chiuso o aperto; il punto c può essere interno all'intervallo oppure uno dei suoi estremi (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$).
Prendiamo ora una qualunque successione di punti x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, nell'intervallo I e diversi da c, che tenda a c, per $n \to +\infty$.