Indice generale

Prefazione **vii**

1 Elementi di teoria degli insiemi **1**
1. Nozioni di logica matematica 1
   1.1 Logica delle proposizioni. Connettivi logici 1
   1.2 Tavole di verità 3
   1.3 Tautologie e regole di deduzione 4
   1.4 Logica dei predicati. Quantificatori 6
2. Simboli e operazioni insiemistiche fondamentali 11
   2.1 Definizioni 11
3. Relazioni 16
   3.1 Prodotto cartesiano 16
   3.2 Definizione di relazione 17
   3.3 Equivalenze 18
   3.4 Ordinamenti 20
4. Funzioni 22
   4.1 Definizione di funzione 22
   4.2 Funzioni particolari. Successioni. Multifunzioni 27
   4.3 Funzione composta 30
   4.4 Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa 31
5. Insiemi finiti 34
   5.1 Numeri cardinali. Numeri naturali 34
   5.2 Il principio di induzione 36
6. Elementi di calcolo combinatorio 41
   6.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni 42
   6.2 Il principio di inclusione ed esclusione 48
   6.3 Probabilità in spazi finiti 52
7. Insiemi infiniti 56

Appendice. Cenno alla teoria assiomatica degli insiemi 59
   1 Linguaggio della teoria 59
   2 Apparato deduttivo 59

2 Insiemi numerici **61**
1. Da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ 61
   1.1 Rappresentazione dei numeri naturali 61
   1.2 I numeri interi relativi 63
   1.3 I numeri razionali 64
   1.4 Struttura di $\mathbb{Q}$ 64
   1.5 Rappresentazione dei numeri razionali 66

2. I numeri reali 69
   - 2.1 Definizione di numero reale 69
   - 2.2 Ordinamento 70
   - 2.3 Struttura algebrica 71
   - 2.4 Proprietà di completezza 74
   - 2.5 Isomorfismo tra campi ordinati completi 76
   - 2.6 Potenza del continuo 77

Appendice A. Dimostrazione delle proprietà di campo ordinato dei numeri reali 79

Appendice B. I numeri-macchina. Errori 82

3. Radicali - potenze - logaritmi 86
   - 3.1 Radici $\boldsymbol{n}$-esime aritmetiche 86
   - 3.2 Potenze con esponente reale 87
   - 3.3 Logaritmi 88
   - 3.4 Alcune disuguaglianze 90
4. I numeri complessi 92
   - 4.1 Definizione di $\mathbb{C}$ e struttura di campo 93
   - 4.2 Coniugato, modulo e argomento 94
   - 4.3 Potenze e radici 98

3 Spazi euclidei 103

1. Gli spazi euclidei: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ e $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ 103
   - 1.1 Spazi vettoriali lineari 103
   - 1.2 Gli spazi $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ e $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ 106
   - 1.3 Gruppi 109
   - 1.4 Prodotto scalare in $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ 110
   - 1.5 Prodotto scalare in $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$ 115
2. Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$ 118
   - 2.1 Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati 118
   - 2.2 Insiemi aperti, chiusi, limitati 120
   - 2.3 La retta ampliata. Gli spazi $\dot{\mathbb{R}}^n$ 125
   - 2.4 Insiemi compatti 128
   - 2.5 Insiemi connessi. Insiemi convessi 129

4 L'operazione di limite 133

1. Funzioni reali di variabile reale 133
   - 1.1 Positività e simmetrie 133
   - 1.2 Funzioni limitate 135
   - 1.3 Funzioni monotone 137
2. Limiti di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ 141
   - 2.1 Definizione di limite 141
   - 2.2 Limite destro, sinistro, per eccesso, per difetto; in $\dot{\mathbb{R}}$ 144
   - 2.3 Limiti e ordinamento 146
   - 2.4 Limiti e struttura algebrica di $\mathbb{R}$ 148
   - 2.5 Esistenza del limite (per funzioni monotone) 154
   - 2.6 Infinitesimi e infiniti. Confronti 157
   - 2.7 Asintoti 160
3. Successioni a valori in $\mathbb{R}$ 164
   - 3.1 Limite di una successione 164
   - 3.2 Confronti 167
   - 3.3 Il numero "e"; alcuni limiti notevoli 171
   - 3.4 Esistenza del limite. Massimo e minimo limite 175

3.5 Esistenza del limite finito. Criterio di Cauchy 181
3.6 Frazioni continue 182
4. Limiti in $\mathbb{C}$. Limiti in $\mathbb{R}^n$ 187
4.1 Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ e loro limiti 187
4.2 Successioni e topologia di $\mathbb{R}^n$ 193
4.3 Il criterio di Cauchy 195

5 Funzioni continue 199
1. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ 199
1.1 Definizione di continuità 199
1.2 Punti di discontinuità 202
1.3 Proprietà fondamentali delle funzioni continue su un intervallo 204
1.4 La continuità uniforme 207
2. Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ 211
2.1 Una caratterizzazione delle funzioni continue 211
2.2 Funzioni continue su un compatto 214
2.3 Funzioni continue su un connesso 215
3. Funzioni elementari 216
3.1 Funzioni razionali intere. Polinomi 216
3.2 Funzioni razionali fratte 220
3.3 Funzioni algebriche 223
3.4 Esponenziali e logaritmi 224
3.5 Funzioni iperboliche e loro inverse 227
3.6 Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse 230
3.7 Esponenziale complesso 235
3.8 Logaritmo complesso. Operazione di elevamento a potenza nel campo complesso 237

6 Calcolo differenziale 1 Funzioni reali di variabile reale 241
1. Derivata e differenziale 241
1.1 Definizione di derivata. Derivata destra, derivata sinistra. Derivate successive 241
1.2 Algebra delle derivate 248
1.3 Derivata di funzione composta. Derivata logaritmica 251
1.4 Derivata di funzione inversa 254
1.5 Differenziale 257
2. I teoremi fondamentali del calcolo differenziale 260
2.1 Teorema di Fermat. Estremi locali 260
2.2 Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange 262
2.3 Prime conseguenze del teorema di Lagrange 264
2.4 Il teorema di de L'Hôpital 269
2.5 La formula di Taylor 274
3. Alcune applicazioni 286
3.1 Funzioni convesse e concave 286
3.2 Applicazioni della formula di Taylor 293
3.3 Determinazione del grafico di una funzione 299
3.4 Risoluzione numerica di equazioni 302

7 Calcolo differenziale 2. Funzioni di più variabili **313**
1. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ 313
1.1 Derivate direzionali e derivate parziali 313
1.2 Differenziale 317
1.3 Derivate e differenziali di ordine superiore 322
1.4 Formula di Taylor 328
1.5 Funzioni omogenee; funzioni convesse e concave 330
2. Funzioni a valori vettoriali 338
2.1 Derivate e differenziali 338
2.2 Differenziale delle funzioni composte 345
2.3 Funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ 347
2.4 Il teorema di inversione locale 349
3. Funzioni implicite 359
3.1 Esempi preliminari 359
3.2 Il teorema di Dini 361
3.3 Insiemi di livello. Punti singolari 365
3.4 Inviluppo di una famiglia di curve 374
3.5 Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili 377
3.6 Funzioni definite da un sistema di equazioni 383

8 Integrali di funzioni di una variabile. Serie numeriche **391**
1. Integrale di Riemann 391
1.1 Definizione di integrale 391
1.2 Caratterizzazioni dell'integrale e significato geometrico 395
1.3 Classi di funzioni integrabili 398
1.4 Proprietà dell'integrale 400
1.5 Primo teorema fondamentale del calcolo integrale 404
1.6 Funzione integrale; secondo teorema fondamentale del calcolo integrale 406
1.7 Integrale indefinito 408
1.8 Regole di integrazione 411
1.9 Integrali dipendenti da un parametro 414
1.10 Integrazione numerica 417
2. Serie numeriche 428
2.1 Definizione di serie e prime proprietà 428
2.2 Serie a termini non negativi 432
2.3 Convergenza e convergenza assoluta 438
2.4 Operazioni sulle serie 443
2.5 Proprietà associativa e commutativa 445
2.6 Medie aritmetiche 448
3. Estensioni dell'integrale di Riemann 452
3.1 Integrali impropri 452
3.2 Criteri di convergenza 455
3.3 Serie e integrali 459
3.4 Integrale di Stieltjes 460
Appendice. Cenno all'Analisi non standard 466

Grafici richiamati nel testo **473**

Indice analitico **481**