Indice generale

Prefazione alla seconda edizione

La nuova edizione di questo libro di testo mantiene l'impianto e le caratteristiche della prima edizione, che era stata ideata con un duplice obiettivo: fornire un manuale di facile lettura per gli studenti del primo anno di università, ricco di esempi ed esercizi che motivino lo svolgimento della teoria e ne illustrino le applicazioni, ma anche un libro completo e rigoroso dal punto di vista matematico, che possa servire come testo di riferimento per l'algebra lineare anche nei successivi anni di studio.

La principale novità della nuova edizione è l'accorpamento del capitolo sugli spazi vettoriali con quello sulle applicazioni lineari; nella nuova trattazione la teoria ha uno sviluppo più naturale e sintetico, che dovrebbe facilitare l'utilizzo del testo per i sempre più numerosi corsi di algebra lineare con un esiguo numero di ore di lezione. Altre revisioni degne di nota sono la riscrittura del paragrafo sulla formula esplicita del determinante, la nuova presentazione delle proiezioni ortogonali nel capitolo sugli spazi euclidei, e, nell'ultimo capitolo, l'introduzione degli operatori autoaggiunti che consentono una dimostrazione più concettuale del teorema spettrale e dei successivi risultati. Inoltre ho cambiato i simboli che denotano applicazioni lineari e il sottospazio generato da un insieme di vettori, e corretto gli errori di cui ero a conoscenza; a questo proposito, voglio ringraziare i numerosi studenti e colleghi che mi hanno segnalato svarioni ed errori di stampa.

Devo un ringraziamento particolare a Luca Mauri, Giorgio Ottaviani, Irene Sabadini e Piercesare Secchi che con le loro osservazioni hanno contribuito a migliorare il testo. Sarò grato a chi vorrà segnalarmi nuovi errori e inesattezze scrivendo all'indirizzo enrico.schlesinger@polimi.it.

Infine desidero ringraziare l'Editore Zanichelli nella persona della dottoressa Isabella Nenci, per tutto l'aiuto che mi ha fornito nella realizzazione di questo nuovo progetto, e la dottoressa Silvia Maschio per l'eccellente lavoro di revisione e impaginazione delle bozze.

Ottobre 2017

L'Autore

Prefazione alla prima edizione

Il presente volume integra i due volumi *Analisi matematica 1* e *Analisi matematica 2* di Bramanti, Pagani e Salsa, in modo da fornire un testo completo per i corsi di matematica di base delle facoltà scientifiche. L'*algebra lineare* è la branca della matematica che si occupa dello studio dei *sistemi lineari* e più in generale delle *applicazioni lineari*. Le applicazioni lineari rivestono un ruolo centrale in matematica perché sono le funzioni più semplici; lo studio di ogni altra funzione è ricondotto, in prima approssimazione, a quello di una funzione lineare: la derivata di una funzione è l'applicazione lineare che meglio approssima la funzione localmente; esattamente come la retta tangente è la retta che meglio approssima una curva in un intorno del punto di tangenza. In coordinate un'applicazione lineare si rappresenta mediante una *matrice* e, come conseguenza, l'algebra lineare dal punto di vista computazionale si riduce all'algebra delle matrici. L'aspetto computazionale sta assumendo un ruolo sempre più importante col crescere della capacità di calcolo dei computer, che già oggi rende possibile la risoluzione di sistemi lineari con centinaia di migliaia di incognite. Il risultato è che all'ingegnere e allo scienziato dei nostri giorni è richiesta una conoscenza sempre più ampia e approfondita dell'algebra lineare.

Nella trattazione non ho cercato di seguire il percorso logico più breve possibile, ho invece privilegiato un'esposizione degli argomenti che porti gradualmente dal concreto all'astratto, cercando così di ovviare a quella percezione di eccessiva astrazione che sembra essere la principale difficoltà nell'affrontare lo studio dell'algebra lineare. Specificamente, nel primo capitolo si mostra come gli assiomi degli spazi vettoriali abbiano origine da quelli della geometria euclidea e si trattano dettagliatamente le operazioni sui vettori geometrici con cui lo studente è familiare dallo studio della fisica; nel secondo capitolo si introducono i sistemi lineari e si descrive il metodo di eliminazione di Gauss, fornendo così uno strumento di calcolo importante; il terzo capitolo è sostanzialmente dedicato al prodotto di matrici. Solo nel quarto e nel quinto capitolo si sviluppa la teoria astratta degli spazi vettoriali e delle applicazioni lineari, sempre privilegiando un approccio costruttivo; per esempio, le dimostrazioni del teorema di nullità più rango e della formula di Grassmann forniscono un metodo per costruire delle basi dei sottospazi coinvolti.

Il volume è stato pensato per poter essere impiegato per due scopi differenti: come libro di testo per un corso di base e come libro di riferimento di algebra lineare per tutto il corso degli studi; sono pertanto trattati, di norma negli ultimi paragrafi di ciascun capitolo, alcuni risultati meno elementari, che non trovano spazio in un corso di base di algebra lineare e il cui studio non è comunque richiesto per la comprensione degli argomenti fondamentali.

In un corso tipico di 35 ore di lezione e 25 ore di esercitazione, il testo può essere utilizzato secondo queste linee: un'esposizione molto veloce delle operazioni sui vettori geometrici dello spazio euclideo, che includa prodotto scalare, proiezioni ortogonali, prodotto vettoriale e determinante di matrici 2×2 e 3×3; il metodo di eliminazione di Gauss e il teorema di Rouché-Capelli del secondo capitolo richiedono da 3 a 5 ore di lezione; nel capitolo 3, il paragrafo sulla fattorizzazione LU è scritto come un complemento e può essere omesso, così come gli ultimi due paragrafi del capitolo 4; il capitolo 5 sulle applicazioni lineari è fondamentale; si può poi scegliere se seguire l'ordine del testo (determinante e autovalori) o anticipare lo studio degli spazi euclidei; in ogni caso, al determinante non andrebbe dedicato troppo spazio e il paragrafo 2 del capitolo sul determinante è studiato per consentire una trattazione molto veloce dell'argomento; l'ultimo paragrafo del capitolo sugli autovalori è dedicato alla forma canonica di Jordan e dovrebbe essere omesso in un corso di base; una trattazione minimale del capitolo sugli spazi euclidei potrebbe limitarsi ai primi cinque paragrafi. L'ultimo capitolo del libro contiene due argomenti fondamentali, che sono il teorema spettrale e la sua applicazione allo studio delle forme quadratiche reali, insieme a molti complementi, in genere non elementari, che di nuovo sono pensati più come riferimento che non come parte del libro di testo: tra questi la fattorizzazione di Cholesky delle matrici definite positive, la legge di inerzia di Sylvester, la decomposizione ai valori singolari, la matrice pseudoinversa, la forma canonica di una matrice normale reale, la forma canonica euclidea dell'equazione di una quadrica.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare le persone che più mi hanno aiutato nella stesura di questo testo: Sandro Salsa che mi ha proposto di scriverlo nell'ambito della revisione del volume *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare* di Bramanti, Pagani e Salsa; Marco Bramanti che mi ha fornito numerosi e preziosi suggerimenti in corso d'opera; Irene Sabadini che ha riletto criticamente le numerose versioni preliminari e che ha sperimentato l'impostazione didattica del volume nel corso di Algebra lineare e Geometria per gli allievi di Ingegneria Matematica del Politecnico di Milano; Marco Boella che ha scritto gli esercizi svolti del secondo capitolo; Cecilia Rizzi che ha scritto alcuni degli esercizi; Maurizio Vianello che mi ha aiutato con i problemi tecnici nell'utilizzo di LaTeX. Ho poi tratto profitto da numerose discussioni sul contenuto del testo coi colleghi Pietro Pirola, Cristina Cerutti, Luca Formaggia, Pierluigi Moseneder, Fabio Nobile, Roberto Notari, Irene Sabadini, Riccardo Sacco, Marco Verani. Uno speciale ringraziamento va a Isabella Nenci della casa editrice Zanichelli la cui consulenza è stata fondamentale per poter portare a compimento il volume.