

Indice

Parte I Logica ed Aritmetica: l'incompletezza

1	Relazioni tra logica e aritmetica: un'introduzione	3
2	Decidibilità e risultati fondamentali di teoria della ricorsività	7
2.1	Funzioni ricorsive primitive e funzioni elementari	11
2.1.1	Definizioni e primi esempi	12
2.1.2	Codifica delle successioni finite di interi	21
2.1.3	Caratterizzazione alternativa dell'insieme \mathcal{E}	25
2.2	La funzione di Ackermann e le funzioni (parziali) ricorsive	29
2.2.1	La funzione di Ackermann	31
2.2.2	Le funzioni ricorsive (parziali)	35
2.3	Gerarchia aritmetica e rappresentazione (in \mathbb{N}) delle funzioni ricorsive	42
2.4	Aritmetizzazione della sintassi	46
2.4.1	Codifica dei termini	49
2.4.2	Codifica delle formule	60
2.4.3	La soddisfacibilità in \mathbb{N} delle formule Δ è elementare	82
2.4.3.1	Formule pulite di \mathcal{L}_0	83
2.4.3.2	Gli indirizzi di una formula Δ	91
2.4.3.3	Le codifiche degli indirizzi di una formula Δ	93
2.4.3.4	Le sequenze di interi delle formule Δ chiuse e pulite	97
2.4.3.5	Calcolo del valore in \mathbb{N} delle formule Δ chiuse e pulite	105
2.4.4	Codifica dei sequenti e delle derivazioni	111
2.5	I risultati fondamentali della teoria della ricorsività	120
2.6	Decidibilità, semi-decidibilità, indecidibilità	131
3	L'aritmetica di Peano	145
3.1	Gli assiomi di Peano	147
3.2	I modelli dell'aritmetica di Peano (al primo ordine)	160

3.3	Le funzioni rappresentabili nell'aritmetica di Peano (al primo ordine)	170
3.4	Incompletezza ed indecidibilità	179
3.4.1	Indecidibilità, punto fisso, primo teorema di incompletezza	182
3.4.2	Il secondo teorema di incompletezza	198
3.4.3	Osservazioni conclusive sull'incompletezza	202
3.4.4	Cenni su incompletezza e secondo ordine	206
Parte II Le basi della teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel		
4	Introduzione alla teoria degli insiemi	215
4.1	Aggregati, insiemi	216
4.1.1	Principi sugli aggregati	218
4.1.2	Necessità di una teoria	220
4.1.3	Ordinali e cardinali	227
4.1.4	Le antinomie	229
4.1.4.1	Il paradosso di Berry	229
4.1.4.2	I paradossi di Burali-Forti e di Cantor	231
4.1.4.3	L'antinomia di Russell	231
4.2	La teoria assiomatica degli insiemi	233
4.2.1	Caratteristiche della teoria assiomatica degli insiemi . . .	234
4.2.2	Alternative	236
4.3	Contenuto della Parte II	237
5	La teoria assiomatica di Zermelo (Z) e quella di Zermelo-Fraenkel (ZF)	241
5.1	Preliminari e convenzioni	242
5.2	La teoria Z di Zermelo	245
5.3	Operazioni tra insiemi (in Z)	250
5.4	L'assioma di rimpiazzamento e la teoria ZF di Zermelo-Fraenkel	259
5.5	Estensioni del linguaggio per definizione	262
6	Gli ordinali	265
6.1	Ordini, buoni ordini e buona fondatezza	267
6.2	Buona fondatezza e principio di induzione	274
6.3	I numeri ordinali	276
6.4	Buoni ordini ed ordinali (in ZF)	284
6.5	L'induzione	293
6.5.1	Dimostrazioni per induzione	293
6.5.2	Definizioni per induzione	295
6.6	Argomento diagonale e ordinali limite	306
6.7	Assioma dell'infinito e Aritmetica ordinale	308
6.7.1	Assioma dell'infinito	309
6.7.2	Operazioni sugli ordinali (in ZF)	312
6.7.3	Punti fissi delle operazioni ordinali	330
6.7.4	Forma normale di Cantor	334

6.8	Cenni sull'uso degli ordinali in teoria della dimostrazione	340
6.8.1	Cenni sulla dimostrazione di non contraddizione di AP di Gentzen	340
6.8.2	Cenni sull'eredità lasciata da Gentzen	344
7	La gerarchia V e l'assioma di fondazione	347
7.1	La gerarchia V	349
7.2	Rappresentazione insiemistica degli oggetti matematici	354
7.3	L'assioma di fondazione	358
8	L'assioma di scelta	367
8.1	Formulazioni equivalenti dell'assioma di scelta	369
8.2	Insiemi infiniti e assioma di scelta	379
8.3	Discussione	386
9	I cardinali	389
9.1	Equipotenza ed insiemi infiniti	391
9.2	I numeri cardinali	409
9.2.1	I cardinali finiti	413
9.2.2	I cardinali infiniti	414
9.3	Aritmetica cardinale (con AS)	418
	Riferimenti bibliografici	435
	Indice analitico	437